12-3 المثلثات المتطابقة

السابق	الحالي	لماذا؟
• تعرفت على المثلثات المتطابقة واستخدمتها.	1 ذكر الأجزاء المتناظرة في المضلعات المتطابقة واستخدامها. 2 البرهنة على تطابق المثلثات باستخدام تعريف التطابق.	• تصنع شركات كثيرة أجهزة الاستريو في السيارة بواجهات قابلة للفك كنوع من التأمين ضد السرقة. يجب أن يتطابق شكل الواجهة وحجمها تمامًا مع المساحة التي يتم تركيبها فيها لكي يتم تركيبها في لوحة عدادات السيارة بالشكل الملائم.

المفردات الجديدة

تطابق congruent

مضلعات متطابقة congruent polygons

أجزاء متناظرة corresponding parts

استخدام تعريف التطابق بدلالة التحركات الصلبة لتوضيح أن المثلثين يكونان متطابقين إذا وفقط إذا كانت أزواج الأضلاع المتناظرة متطابقة وأزواج الزوايا المتناظرة متطابقة.

استخدام معايير التقارب والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.

مراعاة الدقة.

بناء فرضيات صلبة والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

حقوق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة بيرسون التعليمية، Pearson Education, Inc.

1 التطابق والأجزاء المتناظرة

إذا كان هناك شكلان هندسيان بنفس الشكل والحجم، فإنهما **متطابقان**.

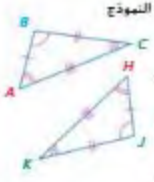
متطابقة	غير متطابقة
على الرغم من أن الأشكال 1 و 2 و 3 في أوضاع مختلفة، إلا أن لها نفس الشكل والحجم.	الشكلان 4 و 5 لهما الشكل نفسه تمامًا لكن ليس الحجم نفسه. والشكلان 5 و 6 لهما الحجم نفسه ولكن ليس الشكل نفسه.

في **المضلعين المتطابقين**، تتطابق جميع أجزاء أحد المضلعين مع **الأجزاء المتناظرة** أو الأجزاء المقابلة في المضلع الآخر. وتشمل هذه الأجزاء المتناظرة الزوايا المتناظرة والأضلاع المتناظرة.

المفهوم الأساسي تعريف المضلعات المتطابقة

الشرح يتطابق المضلعان فقط إذا تطابقت أجزاؤهما المتناظرة.

النموذج



مثال

الزوايا المتناظرة: $\angle A \cong \angle H$ ، $\angle B \cong \angle J$ ، $\angle C \cong \angle K$

الأضلاع المتناظرة: $\overline{AB} \cong \overline{HJ}$ ، $\overline{BC} \cong \overline{JK}$ ، $\overline{AC} \cong \overline{HK}$

عبارة التطابق: $\triangle ABC \cong \triangle HJK$

توجد عبارات تطابق أخرى بالنسبة للمثلثات أعلاه. إن عبارات التطابق الصحيحة للمضلعات المتطابقة تسرد الرؤوس المتناظرة بالترتيب نفسه.

عبارة صحيحة	ليست عبارة صحيحة
$\triangle ABC \cong \triangle HJK$	$\triangle ABC \cong \triangle HKJ$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-3 تحديد واستخدام الزوايا المتطابقة.

الدرس 12-3 تعيين واستخدام أجزاء المثلثات المتطابقة. إثبات تطابق المثلثات باستخدام تعريف التطابق.

بعد الدرس 12-3 استخدام تحويلات التطابق لتخمين وتبرير خواص الأشكال الهندسية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- لماذا يجب أن يتطابق شكل اللوحة وحجمها تمامًا مع المساحة التي يتم تركيبها فيها؟ إذا لم تتطابق اللوحة، فقد لا يتم تثبيتها بطريقةٍ صحيحة، أو قد لا يتم تثبيتها على الإطلاق.
- ما الأجزاء الأخرى من اللوحة التي يجب أن تتطابق تمامًا مع المساحة التي يتم تركيبها فيها؟ فتحات المقابض والأزرار يجب أن تكون بنفس شكل وحجم المقابض والأزرار الفعلية.
- ما نتيجة عدم تثبيت اللوحة بطريقة صحيحة؟ لن يكون الجهاز مؤمّنًا تأمينًا جيدًا ضد السرقة.

1 التطابق والأجزاء المتناظرة

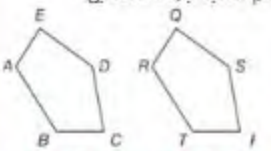
المثال 1 يوضح أنه إذا كانت الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقة، فالمثلثان متطابقان. **المثال 2** يستخدم التطابق في إيجاد القيم المجهولة.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

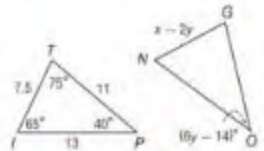
1 وضّح أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد كل الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب جملة التطابق.



$\angle A \cong \angle R, \angle B \cong \angle T, \angle C \cong \angle P, \angle D \cong \angle S, \angle E \cong \angle Q$
$\overline{AB} \cong \overline{RT}, \overline{BC} \cong \overline{TP}, \overline{CD} \cong \overline{PS}, \overline{DE} \cong \overline{SQ}, \overline{EA} \cong \overline{QR}$

كل الأجزاء المتناظرة في المضلعين متطابقة. ولذلك، $ABCDE \cong RTPSQ$.

2 في الرسم التخطيطي، $\triangle NGO \cong \triangle ITP$. أوجد قيمة x و y.



$x = 25.5, y = 9$

الربط **بتاريخ الرياضيات**

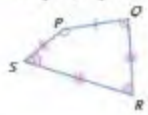
يوهان كارل فريدريش غاوس

(1777–1855) اعتبر غاوس رمز التطابق ليوضح أن طرفي المعادلة متطابقان، وإن لم يكونا متساويين. وتوصل إلى الكثير من التطورات في الرياضيات والفيزياء، بما في ذلك برهان النظرية الأساسية في الجبر.

The Granger Collection, المصدر: New York

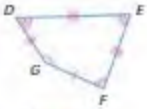
مثال 1 تحديد الأجزاء المتطابقة المتناظرة

وضّح أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد جميع الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب جملة التطابق.



الزوايا: $\angle P \cong \angle G, \angle Q \cong \angle F, \angle R \cong \angle E, \angle S \cong \angle D$

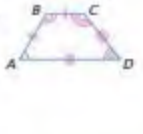
الأضلاع: $\overline{PQ} \cong \overline{GF}, \overline{QR} \cong \overline{FE}, \overline{RS} \cong \overline{ED}, \overline{SP} \cong \overline{DG}$



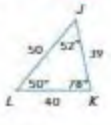
جميع الأجزاء المتناظرة في المضلعين متطابقة. ولذلك، المضلع PQRS ≅ المضلع GFED.

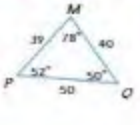
تمرين موجّه 1A–1B، انظر الهامش.

1A.



1B.

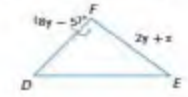




تعني عبارة "فقط إذا" في تعريف المضلع المتطابق أن كلاً من الشرط وعكسه صحيحان. وعلى هذا، فإذا كان المضلعان متطابقين، فإن أزواجهما المتناظرة تكون متطابقة. بالنسبة للمثلثات، نقول إن الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة.

مثال 2 استخدام الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقين

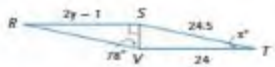
في الرسم التخطيطي، $\triangle ABC \cong \triangle DFE$. أوجد قيمة x و y.



$\angle F \cong \angle B$	CTCPC
$m\angle F = m\angle B$	تعريف التطابق
$8y - 5 = 99$	تعويض
$8y = 104$	اجمع 5 إلى كل طرف.
$y = 13$	اقسم الطرفين على 8.
$\overline{FE} \cong \overline{BC}$	CTCPC
$FE = BC$	تعريف التطابق
$2y + x = 38.4$	تعويض
$2(13) + x = 38.4$	تعويض
$26 + x = 38.4$	بتبسيط
$x = 12.4$	اطرح 26 من كل طرف.

تمرين موجّه

2. في الرسم التخطيطي، $\triangle RSV \cong \triangle TVS$. أوجد قيمة x و y. $x = 12; y = 12.5$



نصيحة **دراسية**

استخدام عبارة تطابق يمكنك استخدام عبارة تطابق لتصاغ على نحو الأضلاع المتناظرة بشكل صحيح.

$\triangle ABC \cong \triangle DFE$
$\overline{BC} \cong \overline{FE}$

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة Pearson Education, Inc. أو شركائها المرخص لهم

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط السمعي / الموسيقي اشرح للطلاب أن التطابق من الممكن أن يلعب السمعَ والبصر. وضّح لهم أنهم إذا استخدموا الضربات الإيقاعية لوضع نموذج لمثلثَين متساويي الأضلاع ومتطابقَين، فيمكنهم استخدام ثلاث ضربات بالطبلة على فترات زمنية متساوية في المرة الأولى ثمّ تكرار نفس الإيقاع في المرة الثانية. ومن الممكن أن يتكون إيقاع المثلث متساوي الساقَين من ضربتَين سريعتَين وواحدة بطيئة أو العكس. أخبر الطلاب أن الإيقاع المتطابق في الموسيقى يُستخدَمُ في الأغاني. ومن الأمثلة المشهورة أغنية "Louie, Louie".

2 البرهنة على تطابق المثلثات تؤدي نظرية مجموع زوايا المثلث التي تعلمتها في الدرس 4-2 إلى نظرية أخرى حول الزوايا في مثلثين.

النظرية 12.3 نظرية الزوايا الثالثة

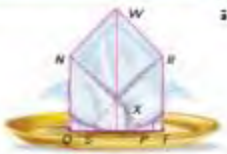
الشرح: إذا كانت زاويتان في مثلث متطابقتين مع زاويتين في مثلث آخر، فستحدد نتطابق الزاوية الثالثة في المثلثين.

مثال: إذا كانت $\angle K \cong \angle C$ و $\angle B \cong \angle J$، إذا $\angle A \cong \angle L$.

ستبرهن على هذه النظرية في التمرين 21.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام نظرية الزوايا الثالثة

تنظيم حفل قرر مخططو المائدة الكبرى طي مناديل المائدة على شكل طي الجيب المثلث كي يتمكنوا من وضع هدية صغيرة في الجيب. إذا علمت أن $\angle NPQ \cong \angle RST$ و $m\angle NPQ = 40$، فأوجد $m\angle SRT$.



بما أن جميع الزوايا العائدة متطابقة، $\angle NPQ \cong \angle RST$. $\angle NQP \cong \angle RTS$ وبحسب نظرية الزاوية الثالثة $\angle QNP \cong \angle SRT$. ووفقًا لتعريف التطابق، $m\angle QNP = m\angle TRS$.

الزاويتان الحادتان في المثلث القائم الزاوية متتامتان.	$m\angle QNP + m\angle NPQ = 90$
التعويض	$m\angle QNP + 40 = 90$
بطرح 40 من كل طرف.	$m\angle QNP = 50$

بالتعويض، $m\angle SRT = m\angle QNP$ أو 50.

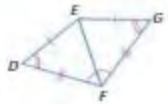
تمرين موجّه

3. في الرسم التخطيطي أعلاه، إذا كانت $\angle WNX \cong \angle WRX$، و $\overline{VX}$ تنصف $\angle NXR$، و $m\angle WNX = 88$، و $m\angle NXW = 49$، فأوجد $m\angle NWR$. اشرح تبريرك.

3. 86. بما أن $\angle WNX \cong \angle WRX$ و $\angle RWX \cong \angle NWX$، إذًا $\angle NXW \cong \angle RWX$. $\angle NWX = 180 - 88 - 49$، أي إن $\angle NWR$ تساوي $43°$ أو $2 \times 43°$ أو 86.

مثال 4 البرهنة على أن الزاويتين متطابقتان

اكتب برهانًا من عمودين.



المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$, $\angle D \cong \angle G$.

المطلوب: $\angle DFE \cong \angle GFE$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$	1. المعطيات
2. $\overline{EF} \cong \overline{EF}$	2. خاصية الانعكاس في التطابق
3. $\angle D \cong \angle G$, $\angle DFE \cong \angle GFE$	3. التمطي
4. $\angle DEF \cong \angle GEF$	4. نظرية الزوايا الثالثة
5. $\triangle DEF \cong \triangle GEF$	5. تعريف المضلعات المتطابقة

الربط بالحياة اليومية

استخدام بعض المهارات الأساسية في حلي المناديل يمكن أن يضيف لمسة أنيقة على أي حفل. الكثير من الطيات تستخدم المثلثات.

نصيحة دراسية

خاصية الانعكاس عندما يشترك مثلثان في ضلع، استخدم خاصية الانعكاس للتطابق لإثبات أن الضلع المشترك متطابق مع نفسه.

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL BL

التوسع اطلب من طلابك أن يرسموا $\triangle ABC$ به الرؤوس $A(-8, 8)$ و $B(-2, 5)$ و $C(-8, 2)$. بعد ذلك، اطلب منهم أن يرسموا $\triangle PTS$ الذي رؤوسه $P(8, 8)$ و $T(2, 5)$ و $S(8, 2)$. اسألهم كيف يمكنهم التحقق من تطابق الأضلاع المتناظرة في المثلثين. بالإضافة إلى ذلك، يسّر لهم النقاش حول ما إذا كانت الزوايا المتناظرة في $\triangle ABC$ و $\triangle PTS$ متطابقة. يمكن للطلاب استخدام قانون المسافة لإثبات أن الأضلاع المتناظرة متطابقة. قد تحتوي المناقشات الأخرى الخاصة بالزوايا على اقتراحات بأن المثلثين متماثلان تمامًا لأن أحدهما هو انعكاس للآخر. أو أنّ أطوال الأضلاع المتساوية تتطلب زوايا متساوية.

2 إثبات تطابق المثلثات

أمثلة إضافية

3 الهندسة المعمارية مخطط لسطح برج مكوّن من مثلثات متطابقة تتقارب كلُّها عند نقطةٍ في الأعلى. إذا كان $\angle J \cong \angle K$ و $m\angle J = 72$، فأوجد $m\angle JIH$.

$m\angle JIH = 36$

4 اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\angle L \cong \angle P$, $\overline{LM} \cong \overline{PO}$, $\overline{LN} \cong \overline{PN}$, $\overline{MN} \cong \overline{OP}$

المطلوب: $\triangle LMN \cong \triangle PON$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle L \cong \angle P$, $\overline{LM} \cong \overline{PO}$, $\overline{LN} \cong \overline{PN}$, $\overline{MN} \cong \overline{OP}$ (معطيات)
2. $\angle LNM \cong \angle PNO$ (نظرية ∡ زاوية الرأس)
3. $\angle M \cong \angle O$ (نظرية ∡ الزاوية الثالثة)
4. $\triangle LMN \cong \triangle PON$ (CPCTC المبرهنة)

إجابات إضافية (تمرين موجّه)

1A. $\angle A \cong \angle W$, $\angle B \cong \angle X$, $\angle C \cong \angle Y$, $\angle D \cong \angle Z$; $\overline{AB} \cong \overline{WX}$, $\overline{BC} \cong \overline{XY}$, $\overline{CD} \cong \overline{YZ}$, $\overline{DA} \cong \overline{ZW}$; المضلع $ABCD \cong WXYZ$ المضلع

1B. $\angle J \cong \angle P$, $\angle K \cong \angle M$, $\angle L \cong \angle Q$; $\overline{JK} \cong \overline{PM}$, $\overline{KL} \cong \overline{MQ}$, $\overline{LJ} \cong \overline{QP}$; $\triangle JKL \cong \triangle PMO$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية اعرض مثلثين متطابقين على اللوحة. اسحب واحدًا منهما لتوضح لطلابك أنه يتناسب تمامًا أعلى المثلث الآخر. استخدم هذه الوسيلة المرئية لتوضح أي أجزاء المثلث تتطابق مع بعضها البعض.

انتبه!

التطابق مقابل التشابه. لإثبات أن مضلعًا متطابقًا، فمن الضروري أن تبيّن أنّ كل الأضلاع والزوايا متساوية القياس. إذا تبين أن الزوايا فقط هي المتطابقة، فهذا يثبت فقط أنّ المضلعات متشابهة.

إرشاد للمعلمين الجدد

التطابق البصري يستطيع الطلاب استخدام العلامات لمساعدتهم في تنظيم الأجزاء المتناظرة للمثلثات المتطابقة بصريًا.

التركيز على محتوى الرياضيات

مفاهيم خاطئة شائعة وضّح للطلاب أن وضع العلامات على الأشكال لا يتم بصورة دائمة وأنّ الأمر متروكٌ لهم ليستخدموا معرفتهم بالمفاهيم الهندسية لإثبات التطابق. أكّد على أهمية استخدام المعطيات فقط ولا يتم استخدام أي فرضيات يفترضها الطلاب بناءً على المظهر الخارجي للشكلَيْن المرسومَيْن.

3 تدريب

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

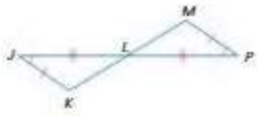
4.
البرهان:
العبارات (المبرّرات)
1. $\angle J \cong \angle P$، $\overline{JK} \cong \overline{PM}$، $\overline{JL} \cong \overline{PL}$، و L تنصف $\overline{KM}$. (معطى)
2. $\angle JLK \cong \angle PLM$ (الزوايا المتقابلة بالرأس تكون $\cong$)
3. $\overline{LK} \cong \overline{LM}$ (تعريف منصف القطعة)
4. $\angle K \cong \angle M$ (نظرية الزوايا الثالثة)
5. $\triangle JLK \cong \triangle PLM$ (CPCTC)

تمرين موجّه

4. اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\angle J \cong \angle P$، $\overline{JK} \cong \overline{PM}$، $\overline{KM}$ تنصف $\overline{JL}$ و L.

المطلوب: $\triangle JLK \cong \triangle PLM$



مثل تطابق القطع والزوايا، تطابق المثلثات يتمتع بخواص الانعكاس والتناظر والتعدي.

النظرية 12.4 خصائص تطابق المثلث

خاصية انعكاس تطابق المثلث

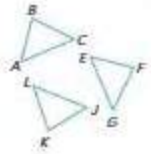
$\triangle ABC \cong \triangle ABC$

خاصية تناظر تطابق المثلث

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$، فإن $\triangle EFG \cong \triangle ABC$.

خاصية تعدي تطابق المثلث

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ و $\triangle EFG \cong \triangle JKL$، فإن $\triangle ABC \cong \triangle JKL$.

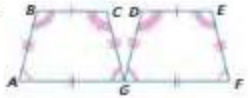


1. $\angle A \cong \angle F$; $\angle B \cong \angle E$; $\angle C \cong \angle D$; $\angle CGA \cong \angle DGF$ $\overline{AG} \cong \overline{FG}$; $\overline{AB} \cong \overline{FE}$; $\overline{BC} \cong \overline{ED}$; $\overline{CG} \cong \overline{DG}$ المضلع $ABCG \cong$ المضلع $FEDG$
2. $\angle Z \cong \angle W$; $\angle V \cong \angle X$; $\angle ZYV \cong \angle WYX$; $\overline{XW} \cong \overline{VZ}$; $\overline{XY} \cong \overline{VZ}$; $\overline{WY} \cong \overline{ZY}$; $\triangle XYW \cong \triangle VYZ$

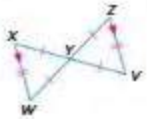
التحقق من فهمك

مثال 1 وضّح أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد جميع الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثم اكتب عبارة التطابق.

1.



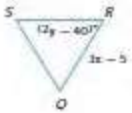
2.



مثال 2 في الشكل، $\triangle LMN \cong \triangle QRS$.

3. أوجد x. 22

4. أوجد y. 46

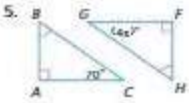


محفوظة لصالح مؤسسة ماكجرو هيل للتعليم © حقوق الطبع والنشر

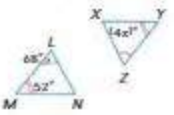
728 | الدرس 3-12 | المثلثات المتطابقة

مثال 3 **الانتظام** أوجد x. اشرح تبريرك. 5-6 انظر الهامش.

5.



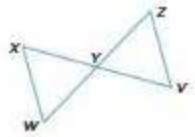
6.



مثال 4 7. **البرهان** اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: Y هي نقطة منتصف $\overline{XV}$ و $\overline{WZ}$.
$\overline{WX} \parallel \overline{ZV}$; $\overline{WX} \cong \overline{ZV}$

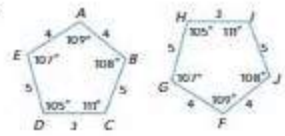
المطلوب: $\triangle WYX \cong \triangle ZYV$ انظر الهامش.



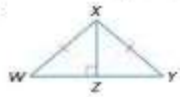
التمرين وحل المسائل

مثال 1 و ّضح أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد جميع الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثم اكتب عبارة التطابق.

8.



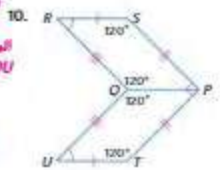
9.



8. $\angle A \cong \angle F$, $\angle B \cong \angle I$, $\angle C \cong \angle J$, $\angle D \cong \angle H$, $\angle E \cong \angle G$, $\overline{AB} \cong \overline{FI}$, $\overline{BC} \cong \overline{JI}$, $\overline{CD} \cong \overline{IH}$, $\overline{DE} \cong \overline{HG}$, $\overline{AE} \cong \overline{FG}$; المضلع $ABCDE \cong$ المضلع $FJIHG$

9. $\angle W \cong \angle Y$; $\angle XZW \cong \angle XZY$; $\angle WXZ \cong \angle YXZ$; $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$; $\overline{XW} \cong \overline{XY}$; $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$; $\triangle XWZ \cong \triangle XYZ$

10.

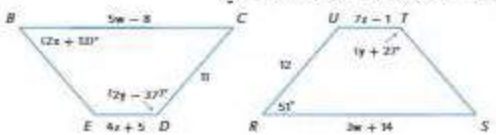


10. $\angle R \cong \angle U$; $\angle S \cong \angle T$; $\angle SPQ \cong \angle TPQ$; $\angle RQP \cong \angle UQP$; $\overline{RS} \cong \overline{UT}$; $\overline{TP} \cong \overline{SP}$; $\overline{RQ} \cong \overline{UQ}$; $\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$; المضلع $RSPQ \cong$ المضلع $TPQU$

11.

11. $\overline{AB} \cong \overline{FE}$; $\overline{BD} \cong \overline{EC}$; $\overline{AD} \cong \overline{FC}$; $\angle A \cong \angle F$; $\angle B \cong \angle E$; $\angle D \cong \angle C$; $\triangle ABD \cong \triangle FEC$

مثال 2 المضلع $BCDE \cong$ المضلع $RSTU$. أوجد قيمة كل مما يلي.



12. x 18 13. y 39 14. z 2 15. w 11

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة ماكجروهيل التعليمية

إجابات إضافية

5. $x = 17.5$ CPCTC

6. $x = 15$

7. لأن Y هي نقطة المنتصف في $\overline{XV}$ و $\overline{WZ}$ إذًا $\overline{WY} \cong \overline{ZY}$ و $\overline{XY} \cong \overline{VY}$. هناك خطان متوازيان يقطعهما خط مستعرض لهما زوايا داخلية متبادلة متطابقة. ومن ثم، $\angle W \cong \angle Z$، $\angle X \cong \angle V$. $\angle XYW \cong \angle VYZ$ لأن الزوايا الرأسية متطابقة. بما أنّ جميع الزوايا والأضلاع المتناظرة متطابقة، فإن $\triangle WYX \cong \triangle ZYV$.

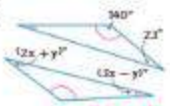
خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	9-27, 36-38, 40-58	9-27, فردي 43-47	10-26, زوجي 36-38, 40, 41, 48-52
OL أساسي	9-31, فردي 32-38, 40, 41, 43-52	9-27, 44-47	28-38, 40-43, 48-52
BL متقدم	28-52		

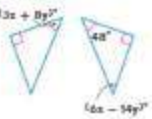
مثال 3 أوجد قيمة x و y.

16.

$x = 14.5,\ y = 35$

17. 

$x = 8,\ y = 1$

18. 

$x = 11.2,\ y = 1.8$

مثال 4

19. **البرهان** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 12.3. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

20. **البرهان** ضع العبارات المستخدمة في برهنة العبارة أدناه بالترتيب الصحيح. واذكر مبرّرات كل عبارة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

تطابق المثلثات يكون متناظرًا. (النظرية 12.4)

المعطيات: $\triangle RST \cong \triangle XYZ$

المطلوب: $\triangle XYZ \cong \triangle RST$

البرهان:

$\angle X \cong \angle R,\ \angle Y \cong \angle S,\ \angle Z \cong \angle T,\ \overline{XY} \cong \overline{RS},\ \overline{YZ} \cong \overline{ST},\ \overline{XZ} \cong \overline{RT}$	$\angle R \cong \angle X,\ \angle S \cong \angle Y,\ \angle T \cong \angle Z,\ \overline{RS} \cong \overline{XY},\ \overline{ST} \cong \overline{YZ},\ \overline{RT} \cong \overline{XZ}$	$\triangle RST \cong \triangle XYZ$	$\triangle XYZ \cong \triangle RST$
؟	؟	؟	؟

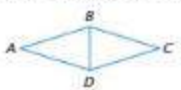
الفرضيات اكتب برهانًا من عمودين.

21. **المعطيات:** متوازي الأضلاع $PQRS$

المطلوب: $\triangle PQS \cong \triangle RSQ$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

22. **المعطيات:** $\angle A \cong \angle C;\ \angle ABD \cong \angle CBD;$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**
$\angle ADB \cong \angle CDB$
$\overline{AB} \cong \overline{CB};\ \overline{CD} \cong \overline{AD}$

المطلوب: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



23. **طباعة القمصان** تعلق صحة مادة الرياضيات وأرادت الطباعة على القمصان من أجل صديقاتها. وقد ذهبت إلى شركة تطبع على القمصان حسب الطلب. تصميمها موضح على اليسار. ما الخاصية التي تضمن تطابق التصميمات المطبوعة؟

23. الإجابة النموذجية: جميع القمصان ستكون متطابقة نظرًا لطباعتها باستخدام الرسم المطبوع ذاته. وفيًّا لخاصية التعدي في التطابق، ستكون الصور مطابقة لبعضها البعض.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

730 | الدرس 12-3 | المثلثات المتطابقة

البرهان اكتب النوع المحدد من برهان الجزء المشار إليه في النظرية 12.4.

24. تطابق المثلثات ينتج بالتعدي. (برهان حرّ) **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

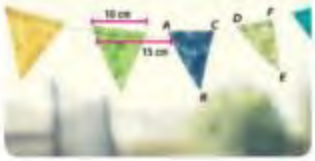
25. تطابق المثلثات ينتج بالانعكاس. (برهان تسلسلي) **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

الجبر ارسم شكلًا وسمّه لتمثيل المثلثات المتطابقة. ثم أوجد قيمة x و y. **28-26. انظر الهامش.**

26. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $AB = 11$, $AC = 17 + x$, $DF = 2x + 13$, $DE = 3y + 2$

27. $\triangle LMN \cong \triangle RST$, $m\angle L = 51$, $m\angle M = 9y$, $m\overline{ST} = 72$, $m\angle T = 4x + 15$

28. $\triangle JKL \cong \triangle MNP$, $JK = 12$, $LJ = 7$, $PM = 3x - 2$, $m\angle L = 67$, $m\angle K = y + 9$, $m\angle N = 2y - 4$



29. **الأشكال المثلثة** يتولى حسن مسؤولية تطويق منطقة بميل وتبلغ مساحتها 9 أمتار مربعة لكي تستخدمها الفرقة الموسيقية أثناء تجمع طلابي. ويستخدم سلسلة من المثلثات المتطابقة متساوية الساقين.

a. اذكر سبعة أزواج من القطع المتطابقة في الصورة.

b. إذا كانت المساحة التي يطوقها الميل مربعة، فما الطول المطلوب لميل المثلثات؟ **12 m**

c. كم عدد المثلثات التي ستكون في الميل؟ **80**

30. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتعرف على عبارة محيطات *المثلثات المتطابقة متساوية*. **a-d. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

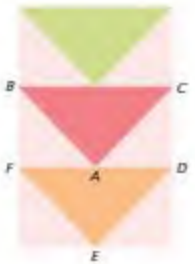
a. **لفظيًا** اكتب عبارة شرطية لتمثيل العلاقة بين محيطي زوج من المثلثات المتطابقة.

b. **لفظيًا** اكتب عبارة عكسية لعبارتك الشرطية. هل العكس صحيح أم خطأ؟ اشرح تبريرك.

c. **هندسيًا** ارسم مثلثين لهما المحيط ذاته لكنهما غير متطابقين إذا كان ذلك ممكنًا. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

d. **هندسيًا** ارسم مستطيلين لهما المحيط ذاته لكنهما غير متطابقين إذا كان ذلك ممكنًا. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

31. **الأنماط** الإوز الطائر قالب يستخدم كثيرًا في صناعة الأكمنة.



a. ما المثلثان المستخدمان لإنشاء النمط؟ **a-e. انظر الهامش.**

b. اذكر اسم زوج من المثلثات المتطابقة.

c. اذكر اسم زوج من الزوايا المتطابقة.

d. إذا كانت $BC = 4$ فما FD؟ اشرح.

e. ما قياس الزاوية $\angle E$؟ اشرح.

32. **الموسيقى** يمكن استخدام أطواق طبلة صوت الباص لإصلاحها. ويجب أن تكون الأطواق بالحجم ذاته. أي قياس ستستخدم لإثبات أن الأطواق متطابقة. اشرح استدلالك. **انظر الهامش.**

حقوق النسخ والطبع © مجموعة ماكجرو هيل التعليمية McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL AL

التوسع تسهّلُ ورقة التمثيل البياني إنشاء أنواع مختلفة من المثلثات المتطابقة. اطلب من طلابك إنشاء تصميم يحتوي على ما لا يقل عن 10 أزواج مختلفة من المثلثات المتطابقة. ضع التحدي أمام الطلاب في شرح كيف يتعرفون على تطابق كل زوجين من المثلثات وفي مقارنة إنشاءاتهم من المثلثات المتطابقة على ورقة التمثيل البياني لإيجاد ميل الخط المستقيم.

التمثيلات المتعددة

في التمرين 30، يستخدم الطلاب الوصف اللفظي والرسومات الهندسية لاستكشاف مساحات المثلثات المتطابقة.

إجابات إضافية

26. $x = 4$, $y = 3$

27. $x = 13$, $y = 8$

28. $x = 3$, $y = 13$

31a. مثلثان مختلفان في الحجم.

31b. الإجابة النموذجية:
$\triangle ABC \cong \triangle EFD$ أو
$\triangle ABF \cong \triangle ACD$

31b. الإجابة النموذجية:
$\triangle ABF \cong \triangle ACD$ أو
$\triangle BAC \cong \triangle FED$

31d. $FD = 4$ لأن الأجزاء المتناظرة من المثلثات المتطابقة متطابقة.

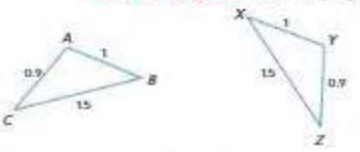
31e. $m\angle E = 90$؛ المثلثات عبارة عن مثلثات متساوية الساقين. الزوايا المقابلة لهذين الساقين تكون متطابقة. في هذه الحالة، سيكون قياس كل منهما 45 درجة، وهذا ما يجعل $\angle E$ زاوية قائمة.

32. القطر، أو نصف القطر، أو محيط الدائرة؛ الإجابة النموذجية: تكون الدائرتان متساويتين في الحجم إذا كان لهما نفس طول القطر، أو نصف القطر، أو المحيط، ولذلك فهي تستطيع أن تحدد إذا كانت الأطواق متطابقة بقياس أيّ منها.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

33. الكتابة في الرياضيات اشرح سبب أهمية ترتيب الرؤوس عند تسمية المثلثات المتطابقة. اذكر مثالاً لدعم إجابتك. **انظر الهامش.**

34. تحليل الخطأ يحدد حمادة ووليد قيمًا للأشكال المتطابقة أدناه. يقول حمادة $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ويقول وليد $\triangle CAB \cong \triangle XYZ$. قبل أيّ منهما على صواب؟ **اشرح انظر الهامش.**



الكتابة في الرياضيات حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً دائمًا أم أحيانًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح تبريرك. **35-38. انظر الهامش**

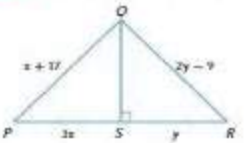
35. *المثلثات متساوية الزوايا متطابقة.*

36. *المثلثان اللذان يتطابق بهما زوجان من الأضلاع المتناظرة وزوج من الزوايا المتناظرة يكونان متطابقين.*

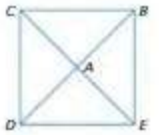
37. *المثلثان اللذان يتطابق بهما ثلاثة أزواج من الأضلاع المتناظرة يكونان متطابقين.*

38. *المثلثان القائمان اللذان يتطابق بهما زوجان من الساقين المتناظرة يكونان متطابقين.*

39. تحدٍّ أوجد قيمة x و y إذا كان $\triangle PQS \cong \triangle RQS$. **انظر الهامش.**



40. تحدٍّ اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن المثلثات الأربعة الناتجة بواسطة أقطار مربع تكون متطابقة. **انظر الهامش.**



حقوق النسخ © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

33. الإجابة النموذجية: عندما نذكر مثلثات متطابقة، فمن المهم أن نذكر الرؤوس المتناظرة في نفس موقعها بالنسبة لكلا المثلثين لأن الموقع يشير إلى التطابق. على سبيل المثال إذا كان $\triangle ABC$ متطابقًا مع $\triangle DEF$، إذًا $\angle A$ تتطابق مع $\angle D$، $\angle B$ تتطابق مع $\angle E$، و $\angle C$ تتطابق مع $\angle F$.

34. حمادة على صواب. فقد جعل الأجزاء متطابقة.

35. في بعض الأحيان، تكون هذه العبارة صحيحة إذا كانت أضلاع المثلثات متشابهة.

36. في بعض الأحيان، تكون هذه العبارة صحيحة إذا كانت الزاوية المتطابقة هي تلك التي تشكلت من تقاطع الضلعين المتطابقين.

37. دائمًا ما يكون هناك طريقة واحدة فقط يمكن أن يتم من خلالها رسم المثلث من خلال ثلاث قطع مستقيمة معطاة.

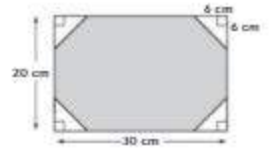
38. لا يكون هناك دائمًا مثال مضاد يمكن أن يتم رسمه.

39. $x = 5.2,\ y = 15.6$

40. لأن الشكل عبارة عن مربع، فإن جوانبه الأربعة تكون متطابقة، ويكون الجانبان المتقابلان متوازيين، وتتقاطع أقطاره في نقطة المنتصف. كل هذا يساهم في جعل الزوايا الموجودة في المنتصف متطابقة لأن الزوايا الرأسية تكون متطابقة، وتكون الزوايا الأصغر متطابقة لأن الخطين المتوازيين يقطعهما خط مستعرض، وتكون الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة. ومن ثم، تكون جميع الأجزاء المتناظرة للمثلثات الأربعة متطابقة. وهذا ما يجعل جميع المثلثات متطابقة. $\triangle ABE \cong \triangle AED \cong \triangle ADC \cong \triangle ACB$

تدريب على الاختبار المعياري

41. قطع حمدي أربعة مثلثات متطابقة من أركان مستطيل ليصنع شكلاً ثمانيًا كما هو ظاهر بالأدنى. فما مساحة الشكل الثماني؟ **B**



A 456 cm ^{2}
B 528 cm ^{2}
C 552 cm ^{2}
D 564 cm ^{2}

42. **الإجابة الشبكية** المثلث ABC متطابق مع $\triangle JHIJ$. رؤوس $\triangle ABC$ هي $A(-1, 2)$ و $B(0, 3)$ و $C(2, -2)$. فما قياس ضلع $\overline{JH}$؟ **5**

43. **الجبر** أي مما يلي عامل في $x^2 + 19x - 42$؟ **H**

F $x + 14$
G $x + 2$
H $x - 2$
J $x - 14$

44. **SAT/ACT** يقطع حماد مسافة معينة بسرعة 30 كم في الساعة ويعود على نفس الطريق بسرعة 65 كم في الساعة. فما متوسط سرعته بالكيلومتر في الساعة طوال الرحلة؟ **C**

A 32.5
B 35.0
C 41.0
D 47.5
E 55.3

مراجعة شاملة

أوجد كل قياس في المثلث الذي على اليسار.

45. $m\angle 2$ **106**
46. $m\angle 1$ **59**
47. $m\angle 3$ **16**

هندسة الإحداثيات أوجد قياسات أضلاع $\triangle JKL$ وضع تصنيفًا لكل مثلث حسب قياسات أضلاعه. **48-51. انظر الهامش.**

48. $J(-7, 10)$, $K(15, 0)$, $L(-2, -1)$
49. $J(9, 9)$, $K(12, 14)$, $L(14, 6)$
50. $J(4, 6)$, $K(4, 11)$, $L(9, 6)$
51. $J(16, 14)$, $K(7, 6)$, $L(-5, -14)$

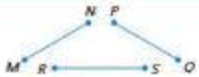
مراجعة المهارات

52. اسبغ البرهان مع إكماله.

المعطيات: $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$, $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\overline{MN} \cong \overline{RS}$

البرهان:



العبارات	المبررات
a. $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$, $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$	a. المعطى
b. $MN = PQ$, $PQ = RS$	b. ؟ تعريف القطع $\cong$
c. $MN = RS$	c. ؟ خاصية التعدي (=)
d. $\overline{MN} \cong \overline{RS}$	d. تعريف القطع المتطابقة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب أن يتوقعوا كيف يمكن لتحديد الأجزاء المتناظرة المتطابقة في مثلث أن يساعدهم في إثبات أن المثلثين متطابقان. في أثناء مغادرة الطلاب لغرفة الصف، دعهم يتبادلوا الأدوار عند ذكر إجاباتهم.

إجابات إضافية

48. $JK = 2\sqrt{146}$, $KL = \sqrt{290}$, $JL = \sqrt{146}$; مختلف الأضلاع
49. $JK = \sqrt{34}$, $KL = 2\sqrt{17}$, $JL = \sqrt{34}$; متساوي الأضلاع
50. $JK = 5$, $KL = 5\sqrt{2}$, $JL = 5$; متساوي الأضلاع
51. $JK = \sqrt{145}$, $KL = 4\sqrt{34}$, $JL = 35$; مختلف الأضلاع